

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT
 DHE SPORTIT
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2015

I DETYRUAR

VARIANTI A

E martë, 09 qershor 2015

Ora 10.00

Lënda: MATEMATIKË (GJIMNAZI)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim.

Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**.

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pikët										
Kërkesa	11	12	13	14	15	16a	16b	17a	17b	18
Pikët										
Kërkesa	19a	19b	20	21	22a	22b	23	24	25a	25b
Pikët										

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.....Anëtar

Për pyetjet 1-13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Jepet bashkësia $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 2\}$. Cili nga shënimet e mëposhtme është i saktë? **1 pikë**

- A) $3 \notin A$
 B) $-2 \notin A$
 C) $0 \notin A$
 D) $2 \in A$

2. Vlera e $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ është: **1 pikë**

- A) -3
 B) $-\frac{1}{3}$
 C) $\frac{1}{3}$
 D) 3

3. Vlera e shprehjes $\log 20 - \log 2$ është: **1 pikë**

- A) 0
 B) 1
 C) 2
 D) 4

4. Vlera e $\sqrt{32} - \sqrt{2}$ është: **1 pikë**

- A) $\sqrt{2}$
 B) $2\sqrt{2}$
 C) $3\sqrt{2}$
 D) 4

5. Diagonalja e drejtëkëndëshit me sipërfaqe 48cm^2 dhe me njërin brinjë 6cm është: **1 pikë**

- A) 6
 B) 8
 C) 10
 D) 12

6. Ekuacioni $\frac{3x-1}{2} = x$ është i njëvlershëm me ekuacionin: **1 pikë**

- A) $x = 0$
 B) $x = 1$
 C) $x = 2$
 D) $x = 3$

7. Vektorët $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ m \end{pmatrix}$ dhe $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ janë pingulë. Vlera e m është: **1 pikë**

- A) -2
 B) 1
 C) 2
 D) 3

8. Syprina (në cm^2) e rrethit me perimetër 6π cm është:

1 pikë

- A) 9
- B) 6π
- C) 9π
- D) $3\pi^2$

9. Koeficienti këndor i drejtëzës me ekuacion $6x-2y+1=0$ është:

1 pikë

- A) -2
- B) 1
- C) 2
- D) 3

10. Nëse jepen $f(x) = \log_3 x$ dhe $g(x) = 3x$, atëhere $\text{gof}(9)$ është:

1 pikë

- A) 6
- B) 3
- C) 1
- D) 0

11. Vlera më e vogël e funksionit $y = \sqrt{2 + \cos x}$ është:

1 pikë

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3

12. Ordinata e pikës ku priten vijat $x = 3$ dhe $y = x^2 - 8$ është:

1 pikë

- A) 1
- B) 3
- C) 4
- D) 8

13. Ekuacioni $x^2 + 2x + m = 0$ nuk ka rrënjë reale për:

1 pikë

- A) $m = 0$
- B) $m < 1$
- C) $m > 1$
- D) $m = 1$

14. Për cilat vlera të m -së numrat $m+2$; $3m-1$ dhe $4m-2$ janë kufiza të njëpasnjëshme të një progresioni aritmetik.

2 pikë

Meqenese numrat janë kufiza të njëpasnjëshme të një progresioni aritmetik kemi: $(3m-1) - (m+2) = (4m-2) - (3m-1)$

$$3m-1-m-2 = 4m-2-3m+1$$

$$2m-3 = m-1$$

$$2m-m = -1+3$$

$$\boxed{m = 2}$$

Për $m=2$ numrat formojnë progresion aritmetik.

15. Të gjëndet bashkësia e përcaktimit të funksionit $y = \sqrt{x} + \log(2-x^2)$

3 pikë

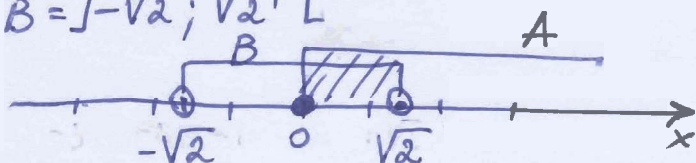
$$E = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ dhe } 2-x^2 > 0\} \text{ ose } \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x^2 > 0 \end{cases}$$

1. $x \geq 0, A = [0; +\infty[$

2. $2-x^2 > 0 \quad 2-x^2 = 0 \quad x^2 = 2 \quad x = \pm\sqrt{2}$

x	-∞	-√2	√2	+∞
2-x ²		-	+	-
2-x ² > 0				

$B =]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$



$E = A \cap B = [0; \sqrt{2}[$

16. Jepet funksioni $y = x^3 - 3x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$.

a) Studioni monotoninë e funksionit

2 pikë

Për të studiuar monotoninë e funksionit, studiojmë shprehjen e derivatit të parë: $y' = 3x^2 - 6x \quad 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$3x = 0 \text{ ose } x-2 = 0$

$x = 0$

$x = 2$

x	-∞	0	2	+∞
y'	+	0	-	+
y	↗		↘	↗

Për $x \in]-\infty; 0[$ y rritës

Për $x \in]0; 2[$ y zbritës

Për $x \in]2; +\infty[$ y rritës.

b) Gjeni ekuacionin e tangjentes së hequr ndaj grafikut të funksionit në pikën me abshisë $x = 1$.

2 pikë

Ekuacioni i tangjentes ndaj grafikut të funksionit në pikën $x=1$ ka trajtën: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$

Ekuacioni i tangjentes: $y - 1 = -3(x - 1)$

$y - 1 = -3x + 3$

$y = -3x + 4$

17. Jepet funksioni $y = 1 - x^2$ për $x \in \mathbb{R}$

a) Gjeni pikat ku grafiku i funksionit pret boshtin ox.

1 pikë

Në pikat ku grafiku pret boshtin ox kemi $y = 0$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$$

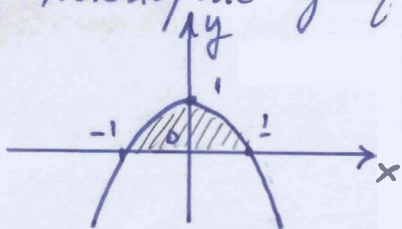
Pikat ku grafiku i funksionit pret boshtin ox janë :

$$A(1; 0) ; B(-1; 0).$$

b) Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit dhe boshti X' X.

2 pikë

Ndertojmë grafikun e funksionit $y = 1 - x^2$ $x \in \mathbb{R}$,
i cili paraqet një parabollë me kulm $K(0; 1)$.



Syprina e figurës është :

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$S = \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ njysi katrorë.}$$

18. Të zgjidhet inekuacioni $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} > 3^{2-3x}$ në \mathbb{R}

2 pikë

Inekuacioni merret në formën :

$$(3^{-1})^{x^2} > 3^{2-3x} \Leftrightarrow 3^{-x^2} > 3^{2-3x}, \text{ meqë baza e fuqisë}$$

$$\text{është } a = 3 > 1 \text{ kemi } -x^2 > 2 - 3x \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 > 0$$

Zgjidhim inekuacionin $-x^2 + 3x - 2 > 0$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

x	-∞	1	2	+∞	
$-x^2 + 3x - 2$	-	0	+	0	-
Im.			√		

Bashkëthia e zgjidhjeve të inekuacionit është $E =]1; 2[$

19. Jepen pikat $A(2;1)$ dhe $B(5;2)$.a) Gjeni ekuacionin e drejtëzës AB .

2 pikë

Skuacioni i drejtëzës (AB) jepet : $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-1}{2-1} \Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x-2 = 3(y-1) \Rightarrow x-2 = 3y-3$$

$$\text{ekuacioni i } (AB) : \boxed{x-3y+1=0}$$

b) Gjeni koordinatat e pikës M në boshtin Ox e tillë që $\angle AMB = 90^\circ$.

2 pikë

Megjithatë pikë M ndodhet në boshtin Ox kemi : $M(x; 0)$

Që këndi $\hat{AMB} = 90^\circ$ duhet që $\vec{AM} \perp \vec{BM}$ ose $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BM} = \begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = (x-2)(x-5) + (-1)(-2) = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 + 2 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Koordinatat e pikës M janë :

$$M_1(3; 0) \quad M_2(4; 0)$$

20. Për cilën vlerë të parametrin a funksioni $y = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x} & \text{për } x \neq 0 \\ a+1 & \text{për } x = 0 \end{cases}$ është i vazhdueshëm në \mathbb{R} 3 pikë

Për $x \neq 0$ ky funksion është i vazhdueshëm.

Të shqyrtojmë vazhdueshmërinë në pikën $x=0$.

Që funksioni të jetë i vazhdueshëm në pikën $x=0$, duhet që :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{x} = \frac{0^2+2 \cdot 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ (formë e pacaktuar)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 0+2 = 2$$

$$f(0) = a+1 \Rightarrow a+1 = 2 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Funksioni është i vazhdueshëm në \mathbb{R} , për $a=1$.

21. Për ç'vlerë të a -së tangjentja ndaj grafikut të funksionit $y = \ln(ax-5)$ në pikën me abshisë $x=2$, formon me boshtin OX këndin 45° . 3 pikë

Megjithatë tangjentja ndaj grafikut të funksionit formon me boshtin OX këndin 45° , kemi: $k_{tg} = \tan 45^\circ = 1$

Nga kuptimi gjeometrik i derivatit: $k_{tg} = f'(2)$

$$f'(x) = [\ln(ax-5)]' = \frac{(ax-5)'}{ax-5} = \frac{a}{ax-5}; \quad f'(2) = \frac{a}{2a-5}$$

$$\frac{a}{2a-5} = 1 \Rightarrow 2a-5 = a \Rightarrow \boxed{a=5}$$

Për $a=5$, tangjentja ndaj grafikut formon me OX, këndin 45° .

22. Jepet hiperbola me ekuacion $x^2 - 4y^2 = 20$.

a) Gjeni gjysmëboshtet e saj. 1 pikë

Trajta e nequllt e ekuacionit të hiperbolës është:

$$\frac{x^2}{20} - \frac{4y^2}{20} = \frac{20}{20} \Rightarrow \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

$$a^2 = 20 \Rightarrow a = \sqrt{20}; \quad \boxed{a=2\sqrt{5}} \quad b^2 = 5 \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{5}}$$

b) Të gjëndet ekuacioni i tangjentes ndaj hiperbolës e cila është paralele me drejtëzën $y = x-7$. 2 pikë

Ekuacionin e tangjentes e kërkojmë në trajtën $y = kx + t$

Megjithatë $(tg) \parallel (d) \Rightarrow k_{tg} = k_d = 1$. Pra $(tg): y = x + t$

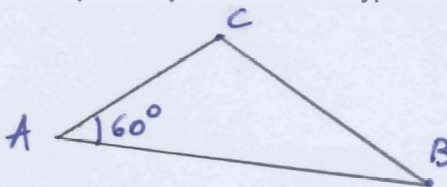
Që drejtëza të jetë tangjente me hiperbolën duhet të plotësojë kushtin e tangjencës: $a^2 k^2 - b^2 = t^2$

$$20 \cdot 1^2 - 5 = t^2 \Rightarrow t^2 = 15 \Rightarrow t = \pm \sqrt{15}$$

Ekuacionet e tangjenteve janë: $y = x \pm \sqrt{15}$.

23. Jepet një trekëndësh me gjatësi të dy brinjëve 8cm dhe 5cm dhe kënd ndërmjet tyre 60° .

Gjeni brinjën e tretë dhe syprinën e tij. 3 pikë



Për të gjetur gjatësinë e brinjës BC abatojmë teoremën e kosinuseve:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$

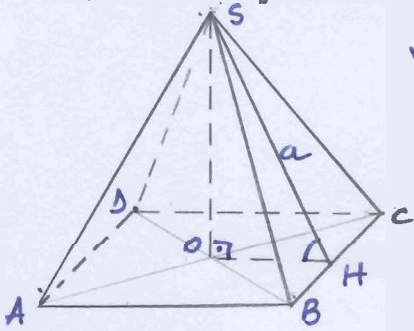
$$BC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 64 + 25 - 40 = 49$$

$$BC = \sqrt{49} = 7 \text{ cm.}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

24. Të gjendet syprina anësore e një piramide katërkëndëshe të rregullt kur jepet diagonalja e bazës $8\sqrt{2}$ cm dhe faqja anësore e saj formon me planin e bazës këndin 60° .

3 pikë



Megë piramida është e rregullt, baza është katror, lartësia bie në qendër të bazës dhe apotema bie në mesin e brinjës së katrorit.

$$\left. \begin{array}{l} SO \perp (ABCO) \\ SH \perp BC \\ OH = \text{proj. } \perp SH \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Te } 3 \perp \\ \rightarrow OH \perp BC \end{array}$$

Pra, këndi $\hat{SHO} = 60^\circ$ (prej e drejtë)

Megë AC diagonale, $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow 8\sqrt{2} = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 8 \text{ cm}$.

këndi $\hat{OSH} = 30^\circ \Rightarrow OH = \frac{1}{2}SH \Rightarrow SH = 2 \cdot OH = 8 \text{ cm}$.

Perimetri $P = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}$.

$$S_a = \frac{1}{2} P \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 8 = 128 \text{ cm}^2$$

25. Jepen shifrat 2; 0; 3; 7; 5.

a) Sa numra 4-shifrorë formohen me këto shifra pa i përsëritur ato?

2 pikë

Një numër 4-shifror merret si radhitje e 4 shifrave nga 5 shifrat e dhëna pa i përsëritur ato:

$$\boxed{4} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96 \text{ numra formohen.}$$

b) Ndërmjet të gjithë numrave 4-shifrorë zgjidhet rastësisht njëri prej tyre. Sa është probabiliteti që numri i zgjedhur të jetë çift?

2 pikë

Numra 4-shifrorë çift janë ata që mbarojnë me 0 ose 2.

Numrat që mbarojnë me 0 janë $\boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{0} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Numrat që mbarojnë me 2 janë $\boxed{3} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{2} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

Gjithesëj numra çift janë: $24 + 18 = 42$.

$$n(A) = 42 \quad n(H) = 96$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{42}{96} = \frac{7}{16}$$